9 – Дәріс

<u>**Тақырыбы**</u>**: Функцияның дифференциалдануы. Дифференциал. Туындының және дифференциалдың геометриялық мағыналары.**

Туындының механикалық және геометриялық мағынасы

Лездік жылдамдық. $S = f(t)$ материялық нүктенің түзудегі қозғалысының заңдылығын өрнектейтін функция болсын.

t уақытқа дейін материялық нүкте $f(t)$, ал $t+\Delta t$ уақытқа дейін $f(t+\Delta t)$ жол жүреді. Сондықтан t-ден $t+\Delta t$ уақытқа дейін ол $f(t+\Delta t)$- $f(t)$ жол жүреді. Бұл жолды қозғалыс уақыты Δt-ға бөліп, қозғалыстың t-ден $t+\Delta t$-ға дейінгі уақыт аралығындағы орташа жылдамдығын табамыз:

$$v_{орт} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Бұл жылдамдықтың $\Delta t \to 0$ жағдайдағы шегі (егер бар болса) қозғалыстың t уақыт кезеңіндегі лездік жылдамдығы деп аталады:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

$f'(t)$ туынды материялық нүктенің t мезгіліндегі жылдамдығы болады.

Жанама туралы есеп. (a,b) аралығында үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін. Оның Γ - графигінен $A = (x, f(x))$ нүктесін белгілеп осы нүктедегі қисыққа жүргізілген жанаманы анықтайық. Ол үшін Γ - қисығынан басқа $B = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ нүктесін аламыз. A мен B нүктелері арқылы өтетін, x **- тің өсу жағына қарай бағытталған** S түзуін **қиюшы** деп атаймыз. Оның x - өсінің оң бағытымен арасындағы бұрышын β деп белгілейік және

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2},\ \Delta x = AC,\ \Delta y = CB,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta.$$

Егер $\Delta x \to 0$, онда $\Delta y \to 0$ және B нүктесі Γ қисығы бойымен A - нүктесіне ұмтылады. Осыдан β бұрышы қандайда бір α мәніне $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \alpha \neq -\frac{\pi}{2}\right)$ ұмтылса, онда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} tg\beta = tg\alpha$$

шегі бар және ол f функциясының x нүктесіндегі туындысына тең:

$$f'(x) = tg\alpha.$$

Керісінше, егер $f'(x)$ туындысы бар болса, онда $\beta \to \alpha = arctgf'(x)$.

Анықтама. Γ - *қисығының* $A = (x, f(x))$ *нүктесіндегі **жанамасы** деп* $A \in \Gamma$ *және* $B = (x+\Delta x, f(x+\Delta x)) \in \Gamma$ *нүктелері арқылы өтетін* ***(*** x ***- тің өсу жағына қарай бағытталған)*** S *- қиюшының* $\Delta x \to 0$ *ұмтылатын* T *- түзуін айтады.*

Аналитикалық геометриядан (x_0, y_0) нүктесі арқылы өтетін бұрыштық коэффициенті $k = tg\alpha$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ болатын түзу теңдеуі

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

түрінде жазылатыны белгілі. Олай болса, $y = f(x)$ қисығының $A(x_0, y_0)$ нүктесіндегі жанама теңдеуі

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

түрінде, ал $A(x_0, y_0)$ нүктедегі **нормаль** теңдеуі.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{4}$$

түрінде жазылады.

Анықтама. x нүктесінде ақырлы туындысы бар функция **дифференциалданатын** функция деп аталады.

Теорема 1. Егер $u(x), v(x)$ x-нүктесінде дифференциалданатын функциялар болса, онда осы нүктеде олардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі $(v(x) \neq 0)$ дифференциалданады және

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

4) $(k \cdot u)' = ku'$, k - нақты сан.

Функция дифференциалы

<u>Анықтама.</u> *Егер f функциясының x - нүктесіндегі Δy - өсімшесі $\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$ (5) түрінде жазылатын болса, онда берілген $f(x)$ функциясы x - нүктесінде дифференциалданады дейді ($A - \Delta x$ -ке тәуелді емес, бірақ x - ке тәуелді).*

Теорема. f функциясы x - нүктесінде дифференциалданатын функция болу үшін x- нүктесінде функцияның ақырлы туындысының болуы қажетті және жеткілікті, теңдіктегі бірінші қосылғыш Δx-ке пропорционал және оған сызықты тәуелді, ал екінші қосылғыш $0(\Delta x)$, Δx - ке салыстырғанда кішкене болу реті жоғары шексіз аз шама $(\Delta x \to 0)$, яғни $\Delta x \to 0$ жағдайда екінші қосылғыш Δx қарағанда жылдамырақ нөлге ұмтылады. Осыған байланысты $A\Delta x = f'(x)\Delta x$ шамасын функция өсімшесінің **бас мүшесі** дейді және ол **функцияның дифференциалы** деп аталады да dy арқылы белгіленеді.

Сонымен, $dy = df(x) = f'(x)dx$.

Егер $u(x),\ v(x)$ x-нүктесінде дифференциалданатын функциялар болса, онда $d(u \pm v) = du \pm dv$; $d(u \cdot v) = udv + vdu$; $d(cu) = cdu$, c - тұрақты сан; $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$. теңдіктен $\Delta y \approx dy$ немесе:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \ \Delta x \to 0$$

жуық теңдігін жазуға болады және оны жуықтап есептеулерге қолданылады.